

Ульев Л.М.

**СИСТЕМА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ
ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ В СООСНЫХ КОНИЧЕСКИХ КАНАЛАХ
ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ***Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»***Введение**

Изучение ламинарных течений в каналах различной геометрии является одной из фундаментальных задач гидродинамики, так как на его основе проводится исследование ряда других проблем, возникающих при конструировании и расчете проточных частей промышленных аппаратов. К таким задачам относится и задача ламинарного течения вязких жидкостей в соосных конических каналах.

Возникает необходимость анализа ламинарных течений при расчете и проектировании машин и аппаратов в различных отраслях техники. Например, при проектировании объемных гидравлических устройств требуется производить расчет переходных соосных конических устройств и расчет конфузорного течения в соосных конических каналах, а также расчет кольцевых конических каналов в системах дроссельного регулирования гидромоторов [1-3].

Наибольшее же распространение получили соосные конические каналы в машинах и аппаратах производства полимеров и изделий из них. Здесь же наблюдается наибольшее разнообразие таких каналов.

Практически все червячные машины имеют в своей компоновке соосные конические каналы, которые, как правило, принадлежат формирующим устройствам или устройствам сопряжения экструзионных головок с экструдером [4]. Например, при гранулировании термопластов погружным способом устройство погружного гранулирования [5] сопрягается с экструдером соосным коническим каналом, в котором расплав термопласта продавливается между дорном (внутренняя стенка) и матрицей (внешней стенкой канала). Большинство конструкций трубных экструзионных головок и головок для производства шлангов имеют конические соосные каналы.

В пределах изменения параметров переработки расплавы некоторых полимеров ведут себя как ньютоновские жидкости [6]. Для практически значимых расходов таких жидкостей $Q = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$, их реофизических свойств $\mu \approx 10^3 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\rho \approx 1250 \text{ кг}/\text{м}^3$, $k \approx 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $\Delta T_{\text{теол}} = 6 \text{ К}$ [7] и геометрических размеров канала (рис. 1) число Рейнольдса:

$$\text{Re} \ll 1, \quad (1)$$

а число Нема-Гриффита [7] $\text{Gn} \ll 1$.

Величина числа Gn говорит о том, что диссипативные эффекты не влияют на динамику течения рассматриваемых жидкостей и ими можно пренебречь, что вместе с хорошим термостатированием экструдеров [8] позволяет рассматривать течение в кольцевых конических каналах как изотермическое, т.е. считать $\mu = \text{const}$.

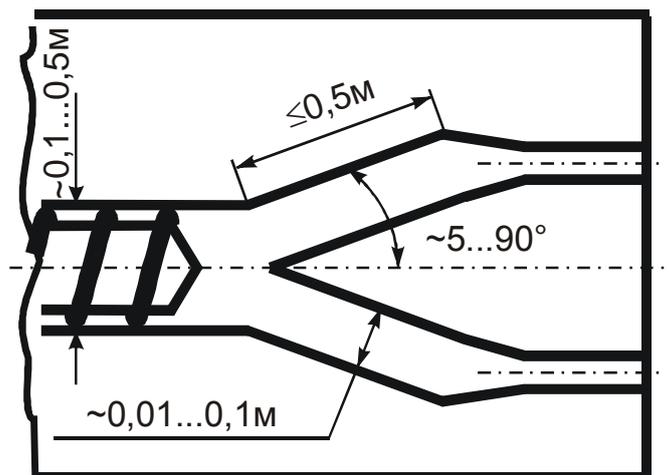


Рисунок 1 – Продольный разрез распределительного участка фильерной головки устройства подводного гранулирования термопластов

Исследование течения в соосных конических каналах постоянной ширины с помощью сферической системы координат представляет большие трудности вследствие того, что границы не являются координатными поверхностями.

Для изучения ламинарных течений в соосных конических каналах удобно использовать биконическую систему координат [9] (рис. 2), которая определяется преобразованием:

$$Z' = R \cos \alpha + X \sin \alpha, \quad (2)$$

$$Y' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \sin \varphi = \Omega \sin \varphi, \quad (3)$$

$$X' = (R \sin \alpha - X \cos \alpha) \cos \varphi = \Omega \cos \varphi, \quad (4)$$

где $\Omega = R \sin \alpha - X \cos \alpha$.

Автором в работах [10-12] была использована система уравнений гидродинамики, описывающих диффузорное течение с пренебрежимо малыми числами Рейнольдса в биконических координатах, а в работах [13-15] уравнения гидродинамики для данной геометрии были записаны в форме Озеена. В работе [16] автор представил решение задачи ползущего течения в соосном коническом конфузоре с постоянной шириной вдоль течения при $Re = 0$, а в [17] обнародованы уравнения движения в форме Озеена для конфузорного течения в соосном коническом канале, но систематический вывод уравнений ламинарного течения в соосных конических каналах до сих пор не был обнародован. Поэтому в настоящей работе мы последовательно получим систему уравнений, описывающих ламинарные, осесимметричные, стационарные течения изотропных несжимаемых жидкостей при отсутствии массовых сил в биконической системе координат.

Последнее условие хотя и является упрощающим, но не является принципиальным для решения. В работах [18, 19] автором показано, что массовые силы совершенно элементарно могут быть учтены в уравнениях движения несжимаемой жидкости, записанных в биконических координатах. При выводе уравнений будем учитывать то, что при течении в каналах с переменной площадью поверхности поперечного сечения инерционные силы всегда будут отличны от нуля вследствие изменения средней по поперечному сечению скорости жидкости вдоль течения.

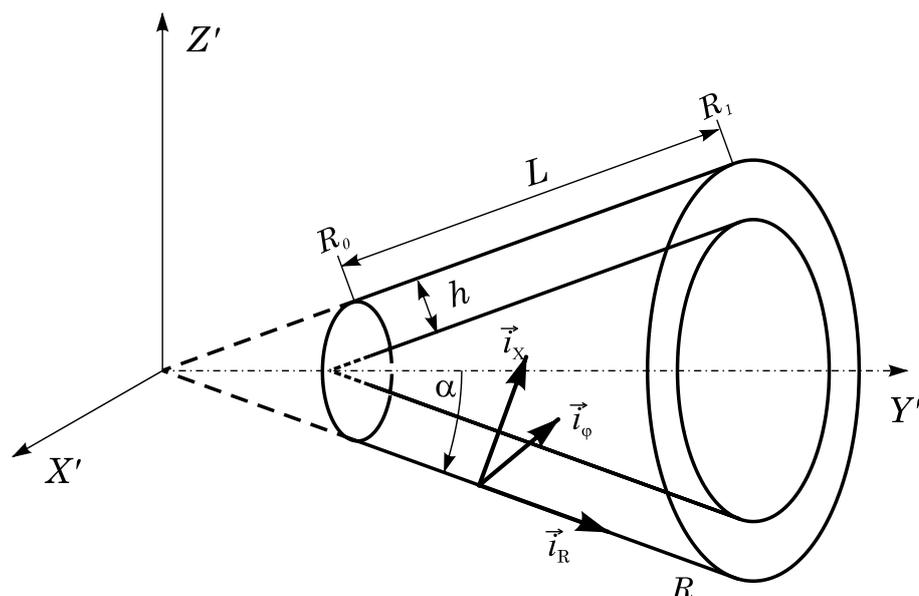


Рисунок 2 – Геометрия соосного конического канала постоянной ширины: h – ширина канала; L – длина образующих границ канала; R – радиальная биконическая координата; $\vec{i}_x, \vec{i}_\phi, \vec{i}_R$ – орты в биконической системе координат; R_0, R_1 – радиальные координаты входа в соосный конический диффузор постоянной ширины и выхода из него (для конфузора наоборот); X', Y', Z' – координаты в декартовой системе координат; α – полуугол раскрытия конических поверхностей, образующих канал

Получение уравнений диффузорного ламинарного течения ньютоновской жидкости в соосном коническом канале постоянной ширины

Для получения уравнений ламинарного движения жидкости и уравнения неразрывности в биконической системе координат воспользуемся дифференциальным уравнением стационарного движения сплошной среды в векторной форме, записанном в криволинейных ортогональных координатах в случае отсутствия массовых сил и представленном через напряжения [20]:

$$\rho \sum_{k=1}^3 \frac{v_k}{H_k} \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_k} =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\bar{p}_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\bar{p}_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\bar{p}_3 H_1 H_2) \right]. \quad (5)$$

Коэффициенты Ламе H_i в (5) определяются соотношением [21]:

$$H_i = \left[\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (6)$$

где x_k – декартовы координаты, а q_i – криволинейные ортогональные координаты.

Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости в криволинейных ортогональных координатах запишется в виде [20]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3 H_1 H_2) \right] = 0. \quad (7)$$

Входящие в уравнения (5), (7) векторы \vec{V} , \vec{p}_1 , \vec{p}_2 и \vec{p}_3 можно представить в виде суммы произведений этих векторов по касательным к координатным линиям на соответствующие орты \vec{i}_k , т.е.

$$\vec{V} = V_k \vec{i}_k, \quad (8)$$

$$\vec{p}_m = p_{mk} \vec{i}_k, \quad (9)$$

где по повторяющимся индексам предполагается суммирование, а m и k изменяются от 1 до 3.

Преобразование (2)-(4) позволяет определить координату q_i как:

$$q_1 = R; \quad q_2 = X \quad \text{и} \quad q_3 = \varphi \quad (10)$$

с соответствующими ортами: $\vec{i}_1 = \vec{i}_R$, $\vec{i}_2 = \vec{i}_X$ и $\vec{i}_3 = \vec{i}_\varphi$.

Используя выражение (6), вычислим параметры Ламэ для преобразования (2)-(4):

$$H_R = 1; \quad H_X = 1 \quad \text{и} \quad H_\varphi = R \sin \alpha - X \cos \alpha = \Omega. \quad (11)$$

Подставляя данные значения параметров Ламэ в (7) с соответствующими переобозначениями координат (10), получим уравнение неразрывности для течения несжимаемой жидкости в биконических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V_R) + \frac{\partial}{\partial X}(\Omega V_X) + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (12)$$

Для того, чтобы получить уравнение движения в напряжениях, записанное в биконической системе координат, нам необходимо подставить соотношения (9) в уравнение (5) и затем вычислить производные от единичных векторов по координатам.

Мы сразу можем заметить, что все три орта \vec{i}_R , \vec{i}_X и \vec{i}_φ остаются постоянными вдоль координатных линий R и X . В то же время все три орта меняются по углу φ . Из дифференциальной геометрии известно, что при дифференцировании единичных векторов по натуральному параметру координатной линии, являющейся окружностью, выполняется условие [22, 23]:

$$\frac{d\vec{i}_k}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_k, \quad (13)$$

где вектор $\vec{\omega}$ называется вектором угловой скорости и направлен перпендикулярно плоскости, в которой происходит изменение натурального параметра. В рассматриваемом случае это направление совпадает с направлением оси Z' (рис. 2).

Следовательно, вектор угловой скорости при изменении φ направлен по оси Z' и равен по величине $\frac{d\varphi}{dt}$:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{i}_{Z'} = \frac{d\varphi}{dt} (\vec{i}_R \cos \alpha + \vec{i}_X \sin \alpha). \quad (14)$$

Используя определение векторного произведения [23]

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad (15)$$

где ε_{ijk} – символ Леви-Чивита, определяем значения производных от ортов биконической системы координат по натуральному параметру (13):

$$\frac{d\vec{i}_R}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \sin \alpha \vec{i}_\varphi; \quad (16)$$

$$\frac{d\vec{i}_X}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \cos \alpha \vec{i}_\varphi; \quad (17)$$

$$\frac{d\vec{i}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} (-\sin \alpha \vec{i}_R + \cos \alpha \vec{i}_X). \quad (18)$$

Выбирая в качестве натурального параметра значения координаты φ , будем иметь:

$$\frac{d\vec{i}_R}{d\varphi} = -\sin \alpha \vec{i}_\varphi, \quad (19)$$

$$\frac{d\vec{i}_X}{d\varphi} = \cos \alpha \vec{i}_\varphi, \quad (20)$$

$$\frac{d\vec{i}_\varphi}{d\varphi} = -\sin \alpha \vec{i}_R + \cos \alpha \vec{i}_X. \quad (21)$$

Подставляя координатную запись вектора скорости (8) в левую часть уравнения (5) и выполняя дифференцирование с помощью соотношений (19)-(21), учитывая обозначения (10) и значения коэффициентов Ламэ (11), получим выражение, определяющее инерционный член в уравнении движения жидкости, записанный в векторном виде в биконической системе координат:

$$\begin{aligned}
 \rho \sum_{k=1}^3 \frac{V_k}{H_k} \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_k} = & \rho \left(V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + V_X \frac{\partial V_R}{\partial X} + \frac{V_\varphi}{\Omega} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{\Omega} \sin \alpha \right) \vec{i}_R + \\
 & + \rho \left(V_R \frac{\partial V_X}{\partial R} + V_X \frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{V_\varphi}{\Omega} \frac{\partial V_X}{\partial \varphi} + \frac{V_\varphi^2}{\Omega} \cos \alpha \right) \vec{i}_X + \\
 & + \rho \left(V_R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} + V_X \frac{\partial V_\varphi}{\partial X} + \frac{V_\varphi}{\Omega} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi V_R}{\Omega} \sin \alpha + \frac{V_\varphi V_R}{\Omega} \cos \alpha \right) \vec{i}_\varphi.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Точно так же, подставляя выражение (9) в правую часть уравнения (15) и проводя дифференцирование векторного выражения, находим:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\vec{p}_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\vec{p}_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (\vec{p}_3 H_1 H_2) \right] = \\
 = \left(\frac{\sin \alpha}{R} p_{RR} + \frac{\partial p_{RR}}{\partial R} - \frac{\cos \alpha}{\Omega} p_{XR} + \frac{\partial p_{XR}}{\partial X} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial p_{\varphi R}}{\partial \varphi} - \frac{\sin \alpha}{\Omega} p_{\varphi\varphi} \right) \vec{i}_R + \\
 + \left(\frac{\sin \alpha}{\Omega} p_{RX} + \frac{\partial p_{XX}}{\partial R} - \frac{\cos \alpha}{\Omega} p_{XX} + \frac{\partial p_{XX}}{\partial X} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial p_{\varphi X}}{\partial \varphi} + \frac{\cos \alpha}{\Omega} p_{\varphi\varphi} \right) \vec{i}_X + \\
 + \left(\frac{\sin \alpha}{\Omega} p_{R\varphi} + \frac{\partial p_{R\varphi}}{\partial R} - \frac{\cos \alpha}{\Omega} p_{X\varphi} + \frac{\partial p_{X\varphi}}{\partial X} + \right. \\
 \left. + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{p_{\varphi X} \cos \alpha - p_{\varphi R} \sin \alpha}{\Omega} \right) \vec{i}_\varphi.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Приравняв (22) и (23) и далее расписывая векторное равенство по координатам R , X и φ , получим систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих стационарное ламинарное течение жидкости в биконических координатах, записанную в напряжениях:

$$\begin{aligned}
 \rho \left(V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + V_X \frac{\partial V_R}{\partial X} + \frac{V_\varphi}{\Omega} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{\Omega} \sin \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\Omega} p_{RR} + \\
 + \frac{\partial p_{RR}}{\partial R} - \frac{\cos \alpha}{\Omega} p_{XR} + \frac{\partial p_{XR}}{\partial X} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial p_{\varphi X}}{\partial \varphi} - \frac{\sin \alpha}{\Omega} p_{\varphi\varphi},
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left(V_R \frac{\partial V_X}{\partial R} + V_X \frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{V_\varphi}{\Omega} \frac{\partial V_X}{\partial \varphi} + \frac{V_\varphi^2}{\Omega} \cos \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\Omega} p_{RX} + \\
 + \frac{\partial p_{RX}}{\partial R} - \frac{\cos \alpha}{\Omega} p_{XX} + \frac{\partial p_{XX}}{\partial X} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial p_{\varphi X}}{\partial \varphi} + \frac{\cos \alpha}{\Omega} p_{\varphi\varphi},
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\rho \left(V_R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} + V_X \frac{\partial V_\varphi}{\partial X} + \frac{V_\varphi}{\Omega} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi V_X}{\Omega} \sin \alpha + \frac{V_\varphi V_X}{\Omega} \cos \alpha \right) =$$

$$\frac{\sin \alpha}{\Omega} p_{R\varphi} + \frac{\partial p_{R\varphi}}{\partial R} - \frac{\cos \alpha}{\Omega} p_{X\varphi} + \frac{\partial p_{X\varphi}}{\partial X} +$$

$$+ \frac{1}{\Omega} \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{p_{\varphi X} \cos \alpha - p_{\varphi R} \sin \alpha}{\Omega}. \quad (26)$$

Заметим, что уравнения (24)-(26) совместно с уравнением (12) представляют собой систему гидродинамических уравнений в напряжениях, описывающих течение несжимаемой жидкости в биконической системе координат.

Для того, чтобы записать уравнение движения жидкости в биконических координатах через проекции вектора скорости, нам необходимо определить соотношения, представляющие компоненты тензора напряжения p_{ik} через компоненты тензора скоростей деформации ε_{ik} в биконической системе координат.

Тензор скоростей деформации в криволинейной ортогональной системе координат определяется следующими соотношениями [20, 24]:

$$\varepsilon_{kk} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{V_i}{H_i H_k} \frac{\partial H_k}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{V_k}{H_k} \right), \quad (27)$$

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{H_i}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{V_i}{H_i} \right) + \frac{H_k}{H_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{V_k}{H_k} \right). \quad (28)$$

Обобщенная гипотеза Ньютона позволяет записать выражения, связывающие тензор напряжений с тензором скоростей деформации для несжимаемой жидкости [25, 20]:

$$p_{ik} = -P\delta_{ik} + 2\mu\varepsilon_{ik}, \quad (29)$$

где величина P представляет давление в точке движущейся жидкости и определяется как отрицательная величина среднего нормального напряжения $P = -\frac{1}{3} p_{ii}$ [25]. В покоящейся жидкости величина P сводится к статическому давлению и обобщает понятие давления на движущуюся жидкость, т.е. представляет меру локальной интенсивности «сжатия» элемента жидкости, и в дальнейшем мы будем именовать величину p статическим давлением. Величина μ в (29) является коэффициентом динамической вязкости жидкости, а δ_{ik} – символ Кронекера.

Далее, подставляя (27) и (28) в (29) и используя определения (10), (11), найдем компоненты тензора напряжений в биконической системе координат:

$$p_{RR} = -P + 2\mu \frac{\partial V_R}{\partial R}, \quad (30)$$

$$p_{XX} = -P + 2\mu \frac{\partial V_X}{\partial X}, \quad (31)$$

$$p_{\varphi\varphi} = -P + 2\mu \frac{1}{\Omega} \left(V_R \sin \alpha - V_X \cos \alpha + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (32)$$

$$p_{RX} = \mu \left(\frac{\partial V_R}{\partial X} + \frac{\partial V_X}{\partial R} \right), \quad (33)$$

$$p_{X\varphi} = \mu \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial V_X}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial X} + \frac{V_\varphi}{\Omega} \cos \alpha \right), \quad (34)$$

$$p_{\varphi R} = \mu \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial R} - \frac{V_\varphi}{\Omega} \sin \alpha + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} \right). \quad (35)$$

Ранее мы уже отмечали, что в данной монографии рассматриваются только аксиально-симметричные течения жидкости в соосных конических каналах, а это означает, что угловая компонента скорости равна нулю, т.е. $V_\varphi = 0$. Все другие параметры течения не зависят от φ : $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{\partial V_X}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{\partial V_R}{\partial \varphi} = 0$. Для такого течения уравнение неразрывности (12) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V_R) + \frac{\partial}{\partial X}(\Omega V_X) = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) позволяет сравнить по величине продольную составляющую скорости V_R и поперечную ее составляющую V_X :

$$|V_X| \approx \frac{h}{L} |V_R|, \quad (37)$$

где h – ширина канала, $L = R_1 - R_0$ – длина образующей конических границ канала (рис. 2). И для размеров каналов, аналогичных размерам, приведенным на рисунке 1.1, или для размеров каналов из работ [26, 27] мы имеем неравенство $h \ll L$, вследствие этого получаем соотношение сравнения:

$$V_X = o(V_R), \quad (38)$$

что позволяет пренебречь угловой и поперечной составляющими скорости в уравнении неразрывности, записав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial R}(\Omega V_R) = 0, \quad (39)$$

а также в уравнениях движения (24)-(26) и в выражениях, определяющих компоненты тензора напряжений (30)-(35). Подставляя последние в уравнения движения и учитывая уравнение неразрывности (39) и то, что число Нема-Гриффита $Gn \ll 1$, т.е. $\mu = \text{const}$, получим:

$$\rho V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} = -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{\mu}{\Omega} \frac{\partial}{\partial X} \left(\Omega \frac{\partial V_R}{\partial X} \right), \quad (40)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\mu \cos \alpha}{\Omega} \frac{\partial V_R}{\partial R}. \quad (41)$$

Таким образом, система гидродинамических уравнений (39)-(41) описывает аксиально-симметрическое диффузорное ламинарное течение в соосном коническом канале с учетом сделанных нами сравнительных оценок составляющих скорости жидкости.

Выполняя оценку членов в уравнениях (40) и (41), можно записать

$$\left| \frac{\partial P}{\partial R} \right| \ll \frac{\rho V_R^2}{L} + \mu \frac{V_R}{h^2}, \quad (42)$$

$$\left| \frac{\partial P}{\partial X} \right| \ll \mu \cos \alpha \frac{V_R}{L}, \quad (43)$$

и, поскольку $h \ll L$ в рассматриваемых каналах, получаем сравнение величины градиента давления:

$$\left| \frac{\partial P}{\partial X} \right| = o \left| \frac{\partial P}{\partial R} \right|. \quad (44)$$

Поэтому для поперечной составляющей градиента давления мы можем записать:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = 0. \quad (45)$$

Таким образом, система уравнений гидродинамики (12), (24)-(26), с помощью сделанных нами оценок, редуцирована к двум уравнениям (39) и (40), описывающим аксиально-симметрическое диффузорное ламинарное течение в соосных конических каналах в биконической системе координат.

В качестве условий однозначности для определения распределения скорости при ламинарном диффузорном течении в соосном коническом канале выберем условие прилипания жидкости на границах канала:

$$V_R = 0, \quad X = 0, \quad (46)$$

$$V_R = 0, \quad X = h, \quad (47)$$

где h – ширина канала (рис. 2).

Начальным условием для давления будем считать заданную величину давления на входе в канал:

$$P = P_0, \quad R = R_0. \quad (48)$$

В последнем условии важно иметь в виду то, что значение давления P_0 является относительной величиной, начиная от которой мы можем определять изменения давления вдоль течения в канале, т.е. вычислять значение $\Delta P = P - P_0$, где P – текущее давление. Подстановка ΔP в уравнение (40) вместо P не изменяет самого уравнения в нашем случае, т.к. жидкость считается несжимаемой, и поэтому, решив поставленную задачу с условием (48), мы определим распределение перепада давления вдоль канала и распределение градиента давления вдоль течения. Определение перепада давления вдоль канала $\Delta P(R)$ является практически важной задачей, поскольку позволяет построить расходно-напорную характеристику для ламинарного течения в соосных конических каналах – $\Delta P(Q)$, знание которой необходимо, например, при определении рабочей точки экструзионных машин для производства и переработки полимеров.

Математическая формулировка задачи ламинарного конфузорного течения в соосных конических каналах постоянной ширины

При рассмотрении конфузорного течения в биконических координатах также, как и при его анализе в сферической системе координат (п. 1.4), учтем, что направление движения жидкости противоположно направлению радиальной координаты.

Учитывая данный факт и произведя замену переменных:

$$R = R_1 - T; \quad X = X, \tag{49}$$

получим систему гидродинамических уравнений, описывающих стационарное апроксимально-симметрическое ламинарное течение несжимаемой жидкости в соосном коническом конфузоре постоянной ширины с учетом оценок величины членов в уравнениях движения, выполненных выше для практически интересных геометрических размеров каналов:

$$\rho V_T \frac{\partial V_T}{\partial T} = -\frac{\partial P}{\partial T} + \frac{\mu}{\Omega'} \frac{\partial}{\partial X} \left(\Omega' \frac{\partial V_T}{\partial X} \right), \tag{50}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} (\Omega' V_T) = 0, \tag{51}$$

где

$$\Omega' = (R_1 - T) \sin \alpha - X \cos \alpha. \tag{52}$$

Граничными условиями для определения распределения скорости жидкости в канале остаются условия прилипания на границах канала:

$$V_T = 0, \quad X = 0, \tag{53}$$

$$V_T = 0, \quad X = h, \tag{54}$$

а начальное условие для определения давления запишется как:

$$P = P_0, \quad T = 0. \tag{55}$$

Заключение

В работе получена система уравнений, описывающих стационарное ламинарное осесимметричное течение ньютоновской жидкости в соосных конических каналах постоянной ширины. Полная система уравнений гидродинамики записана в терминах напряжений. Проведена оценка членов уравнений для практически интересных случаев течения, и упрощенные уравнения записаны в форме Озеена как для диффузорного, так и для конфузорного течения.

Обозначения

k – коэффициент теплопроводности жидкости, Вт/(м·К); h – ширина канала, м; P, P_0 – давление текущее и на входе, Па; \vec{p}_i – вектор напряжений, Па; Q – объёмный расход, м³/с; R, R_0, R_1 – радиальная биконическая координата выхода из канала и входа в него, м; V – скорость, м/с; T' – температура, К; X', Y', Z' – координаты в декартовой системе, м; α – азимутальная биконическая координата, рад; μ – коэффициент динамической вязкости, Па·с; ρ – плотность жидкости, кг/м³; φ – аксиальная биконическая координата, рад.; ε_{ik} – тензор скоростей деформации, с⁻¹; X – поперечная биконическая координата, м; $Gn = \frac{\mu V^2}{k \Delta T_{\text{theol}}}$ – число Нема – Гриффита, $Re = \frac{\rho V h}{\mu}$ – число Рейнольда; $\Delta T_{\text{theol}} = \mu \left/ \frac{\partial \mu}{\partial T'} \right.$ – интервал температуры, на котором происходит существенное изменение вязкости, К.

Литература

1. Осипов А.Ф., Объемные гидравлические машины. – М.: Машиностроение. 1966. – 160 с.
2. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов и др. – М.: Машиностроение. 1982. – 423 с.
3. Башта Т.М. Объемные насосы и гидравлические двигатели гидросистем. – М.: Машиностроение. 1974. – 608 с.
4. Тадмор З. Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия. 1984. 632 с.
5. Пономаренко В.Г., Житинкин А.А., Запорожец О.Л., Ульев Л.М. и др. Погружное устройство для гранулирования термопластов // Авторское свидетельство № 1720868 СССР. 23. 03. 92. Бюл. № 11.
6. Пономаренко В.Г., Потенба Г.Ф., Ульев Л.М., Житинкин А.А., Ольховиков О.А. Определение реологических свойств высоковязких жидкостей с помощью автоматического капиллярного вискозиметра // Инженерно-физический журнал. 1990. Т. 59. № 1. С. 158-159. Деп. В ВИНТИ АН СССР. Рег. № 1224-В90.
7. Ульев Л.М. Течение и теплообмен высоковязкой жидкости в круглом конфузоре // ТОХТ. 1992. Т. 26. №2. С. 243-253.
8. Торнер Р.В., Актин М.С. Оборудование заводов по переработке пластмасс. – М.: Химия. 1986. – 400 с.
9. Гольдин А.М., Карамзин В.А. Гидродинамические основы процессов тонкослойного сепарирования. – М.: Агропромиздат, 1985. – 264 с.
10. Ульев Л.М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями. II. Конусы не имеющие общей вершины // International Meeting on Information Technology. KHARKOV 12-14 May 1997. Vol. 5. Kharkov. 1997. P. 441-443.

11. Ульев Л.М. Медленные течения в коаксиальных конических каналах. // Вестник Харьковского государственного политехнического университета, вып.7. 4.2. Механика. Машиностроение. Харьков: ХГПУ. 1997. С. 22-31.
12. Ульев Л.М. Медленные течения между соосными коническими поверхностями // Инженерно-физический журнал. 1998. Т. 71, № 6. С. 1092 – 1098.
13. Ульев Л.М. Развитие ламинарного диффузорного течения в конической щели постоянной ширины // Інтегровані технології та енергозбереження. Харьков. 2000, №1. С. 57-69.
14. Ульев Л.М. Решение задачи ламинарного диффузорного течения в соосном коническом канале постоянной ширины с частичным учетом инерционных свойств // Вестник НТУ «ХПИ». 2002. № 6. Харьков. НТУ «ХПИ». С. 66-71.
15. Ульев Л.М. Ламинарное диффузорное течение в соосном коническом канале переменной ширины с частичным учетом сил инерции // Вестник НТУ «ХПИ», 2003. Вып. 17. С. 143-153.
16. Ульев Л.М. Теплообмен при медленном течении в коаксиальных конических конфузорах для граничных условий первого рода // Інтегровані технології та енергозбереження. Харьков. 1999. № 2. С. 40-52.
17. Ульев Л.М. Влияние инерционных свойств на распределение давления при ламинарном конфузоре в соосном коническом канале постоянной ширины // Вестник НТУ «ХПИ». 2002. Вып. 9. Т. 1. Харьков. НТУ «ХПИ». С. 88-94.
18. Ульев Л.М., Коровко В.А. Теплообмен и испарение при пленочном течении в конфузоре // Теплообмен- ММФ-96. Том 4. Теплообмен в двухфазных системах. Ч. 2. – Минск. 1996. С. 151-154.
19. Ульев Л.М., Данилов Ю.Б. Теплообмен и испарение жидкости при пленочном течении в конфузоре // Теоретические основы химической технологии. 1999. Т. 33, №1. С. 30-38.
20. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехтеорлит. 1955. – 520 с.
21. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука. Глав. ред. физ. – мат. лит. 1967. – 608 с.
22. Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г. Математические формулы. – М.: Наука. Глав. ред. физ. – мат. лит. 1985. – 128 с.
23. Ли Цзун-дао. Математические методы в физике. М.: Мир. 1965. – 296 с.
24. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Т. 2. – М. – Л. ОГИЗ. Гос. издат. тех.-теор. лит. 1949. – 612 с.
25. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Наука. 1973. 760 с.
26. Каплун Я.Б., Ким В.С. Формующее оборудование экструдеров. – М.: Машиностроение. 1969 – 160 с.
27. Joshi M.V. Dies For plastic extrusion. – Delhi.: Macmillan India Limited. 1984. – 176 p.

УДК 532.5; 678.027

Ульев Л.М.

СИСТЕМА ГІДРОДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ ЛАМИНАРНИЙ ПЛИН У СПІВВІСНИХ КОНІЧНИХ КАНАЛАХ СО СТАЛОЮ ШИРИНОЮ

У роботі отримана система рівнянь, що описують стаціонарний ламинарний осі-симетричний плин ньютонівської рідини в співвісних конічних каналах сталої ширини. Повна система рівнянь гідродинаміки записана в термінах напруг. Проведено оцінку членів рівнянь для практично цікавих випадків плинину, після чого спрощені рівняння записані у формі Озеена як для диффузорного, так і для конфузоревого плинину.